

# Espai dual

*L'article que fa que l'espai dual sigui tan fàcil d'entendre com anar a comprar fruita!*

*Sergio Oller (sergioller@gmail.com)*

## El forn de pa

L'altre dia recordava el primer cop que vaig anar a comprar al forn de pa tot sol. M'havia fet una llista que havia memoritzat perfectament:

"1 'barra de pa de quart' + 1 'croissant de xocolata' " (Llista 1)

El moment de pagar va ser molt especial. Vaig poder aplicar les mates apreses a classe: en primer lloc vaig sumar l'import total a pagar i més tard vaig haver de restar per veure si m'havien tornat bé el canvi. La Paquita no s'havia equivocat. El canvi quadrava. Vaig descobrir el plaer de poder aplicar les matemàtiques als problemes quotidians i em vaig prometre mirar de fer-ho sempre.

## La fruiteria

Van passar els anys i vaig acabar a Física: Les matemàtiques com a eina per descriure el món. Com podia fer servir l'àlgebra a la vida quotidiana?

Vet aquí que l'altre dia volia anar a la fruiteria del barri a comprar tot sol (ara no per primer cop). Vaig fer-me una llista en un pedaç de paper:

"6 'pomes' + 3 'peres' + 10 'plàtans' " (Llista 2)

Em vaig ficar el paper a l'abric i vaig sortir al carrer. Al arribar a la fruiteria vaig treure de la butxaca dos pedaços: també tenia la llista de la setmana anterior:

"2 'pomes' + 1 'peres' + 4 'plàtans' " (Llista 3)

Comparant-les veiem que les dues llistes de la compra tenen una estructura comuna, i fixant-nos en la pàgina 61 del Castellet podem veure que són elements d'un espai vectorial. Només cal llegir en el Castellet  $\forall u \in E$  com "per qualsevol 'llista de la compra' de 'fruites' " i comprovar com les propietats que defineixen un espai vectorial es compleixen per les llistes de la compra.

La dimensió d'aquest espai vectorial és igual al nombre de fruites diferents que tenim disponibles a la fruiteria. En aquest text imaginaré que la Margarita, la fruitera, només té tres fruites en venda, però podem afegir més fruites (pinyes, papaies...) sense dificultat.



Al fer la llista havia definit i utilitzat una base en aquest espai, sobre la qual fer la llista de la compra era molt senzill: les 'unitats de fruita'. Els elements de la base eren tres: 'poma', 'pera' i 'plàtan'. Les components de "Llista 2" en aquesta base són 6,3,10 respectivament.

Res m'impedeix (a banda del sentit comú) escriure la llista de la compra així:

"9 'pomes i peres' + 13 'peres i plàtans' + 16 'plàtans i pomes' " (Llista 2)

Probablement la Margarita, que deu rondar els seixanta tot i que n'aparenta menys, hauria patit per atendre'm i cobrar-me. No crec que la Margarita faci canvis de base per satisfer les bogeries de cada client, de fet en aquell moment no creia que la Margarita fos capaç de fer canvis de base de cap tipus.

La Margarita va escollir la fruita amb molta cura i va pesar-la a la balança. Jo estava comprant:

" 1,32 'kg pomes' + 0,51 'kg peres' + 1,8 'kg plàtans' ". (Llista 2)

Per la meua sorpresa, la Margarita havia canviat de la base 'unitats de fruita' a la base 'kg de fruita'.

Jo pensant que la Margarita no sabia fer canvis de base i resulta els fa a cada venda amb una balança!

Llegint de la mateixa balança (és de les electròniques) em va dir:

- Són cinc disset.
- Això és un escalar! - vaig exclamar.

Amb un somriure afable, una veu dolça i una cara de "no sé que dius però paga'm" em va repetir el preu i vaig pagar-li. Vaig marxar cap a casa pensatiu.

La seva balança havia fet un canvi de base (de 'unitats de fruita' a 'kg de fruita') i havia convertit la "Llista 2" del meu espai vectorial en 5,17€, un escalar, el "TOTAL" del tiquet. Per fer-ho, Margarita havia utilitzat la seva llista que és una llista de preus:

$$"1,40\text{€ 'kg poma'} + 2,10\text{€ 'kg pera'} + 1,25\text{€ 'kg plàtans'}" \quad (\text{Preus 1})$$

De la mateixa manera que jo tinc el meu espai vectorial del conjunt de llistes de la compra possibles, totes les llistes de preus que ha posat la Margarita al llarg dels anys comparteixen una estructura comuna i també són elements d'un espai vectorial diferent, l'espai vectorial dels 'preus de la fruiteria'. Potser la Margarita sap més àlgebra del que em pensava...

De fet, la Margarita havia anat més lluny que jo. Havia agafat una 'llista de preus' (Preus 1) i combinant-la amb un element del meu espai (Llista 2) havia obtingut un escalar, un preu. És raonable pensar que hi ha alguna relació entre el seu espai i el meu, ja que de la combinació d'un element del seu espai amb un element del meu obtenim un escalar. Aquesta relació es coneix com "Els nostres espais són duals". Veiem com s'obté el preu pas a pas:



$$\text{TOTAL} = (\text{Preus 1}) \cdot (\text{Llista 2}) =$$

$$\left(1,40 \frac{\text{€}}{\text{kg pomes}} + 2,10 \frac{\text{€}}{\text{kg peres}} + 1,25 \frac{\text{€}}{\text{kg plàtans}}\right) \cdot (1,32 \text{ kg pomes} + 0,51 \text{ kg peres} + 1,8 \text{ kg plàtans})$$

Fem la propietat distributiva i obtenim nou termes. Què fem amb les unitats de cada terme?

$$\text{És obvi que } \frac{\text{€}}{\text{kg pomes}} \cdot \text{kg pomes} = 1 \text{ € } \text{ però què passa amb } \frac{\text{€}}{\text{kg pomes}} \cdot \text{kg peres} \text{ ?}$$

Com un quilo de peres no conté cap poma, aquest producte creuat ha de donar zero. Així podem fer zero els productes creuats i obtenim el TOTAL:

$$1,4 \cdot 1,32 \cdot 1 \text{ €} + 2,10 \cdot 0,51 \cdot 1 \text{ €} + 1,25 \cdot 1,8 \cdot 1 \text{ €} = 5,17 \text{ €} \quad \text{que és el que la Margarita m'havia dit.}$$

*Per què la Margarita ha pesat les fruites que li he demanat?*

La Margarita té els preus en € per kg de fruita, per això vol la fruita en kg. Això li permet tatxar els productes creuats i només haver de multiplicar les components de "Preu1" (1.40, 2.10, 1.25) per les components de "Llista 2" (1.32, 0.51, 1.8) i sumar els resultats. Això es coneix com fer servir bases duals.

*Quin espai és el dual?*

L'un és dual de l'altre. A mi em sembla que el de la Margarita és el dual, però ella pensarà que és la meua llista la que s'aplica sobre els seus preus. "El dual del dual és l'espai original!"

*I els tensors com entren aquí?*

Ens cal anar al mercat, a comprar croquetes... La Sílvia hi treballa i en té de molt bones! Potser fa servir tensors per cobrar-me i no ho sap! Algun dia us ho explicaré...